Correction du devoir surveillé $n°8$

Problème I : Variables aléatoires

Un professeur envoie n invitations à des anciens élèves pour un carrefour des métiers. Chaque ancien élève lui répond avec une probabilité p. Il fait un deuxième envoi à ceux qui n'ont pas répondu la première fois.

1. Soit Y le nombre de réponses au premier envoi et Z le nombre de réponses au deuxième envoi.
   (a) $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ où les $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ sont indépendantes. Donc $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$.
   On ne traitera pas les cas triviaux $p=0$ et $p=1$. Pour le reste du problème, on a donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y=i) > 0$.
   (b) $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
   (c) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z=j) = \begin{cases} \binom{n-i}{j} p^j (1-p)^{n-i-j} & \text{si } j \in [\![0,n-i]\!], \\ 0 & \text{si } j \in Z(\Omega)\backslash[\![0,n-i]\!]. \end{cases}$
2. Soit $X = Y + Z$ le nombre total de réponses.
   (a) On a $(X=0) = (Y=0) \cap (Z=0)$, d'où :
   $$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z=0) = (1-p)^n(1-p)^n = (1-p)^{2n}$$
   et $(X=1) = ((Y=1)\cap(Z=0)) \cup ((Y=0)\cap(Z=1))$, d'où
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}_{(Y=1)}(Z=0) + \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z=1) \\ &= \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}(1-p)^{n-1} + (1-p)^n \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \\ &= (2-p)\, np(1-p)^{2(n-1)}. \end{aligned}$$
   (b) *Question préliminaire :* Pour tout $(i,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, on a :
   $$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!i!(k-i)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$
   (c) On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   Soit $k \in [\![0,n]\!]$,
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} (Y=i)\cap(Z=k-i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (2-p)^k \\ &= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}. \end{aligned}$$
   Donc $X \sim \mathscr{B}(n, p(2-p))$.
   (d) On a donc que $\mathbb{E}(X) = np(2-p)$.
   (e) Par ailleurs, $\mathbb{V}(X) = np(2-p)(1-p)^2$.

Problème II : Espaces préhilbertiens

Dans cet exercice, on considère **la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel** sur $E = \mathbb{C}^2$.
On munit E du produit scalaire défini, pour tous $Z = (z_1, z_2)$ et $Z' = (z_1', z_2')$ dans E, par :

$$(Z \mid Z') = \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2'\right).$$

1. La famille $((1,0), (\mathbf{i}, 0), (0,1), (0, \mathbf{i}))$ est libre et génératrice de $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. C'est donc une base de E d'où $\dim(E) = 4$.
2. Montrons que $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to R$ est une forme sur E.
   Soit $Z = (z_1, z_2)$, $Z' = (z_1', z_2')$ et $Z'' = (z_1'', z_2'')$ dans E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Symétrie :
     $(Z \mid Z') = \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2'\right) = \mathfrak{Re}\left(\overline{\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2'}\right) = \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1'}z_1 + \overline{z_2'}z_2\right) = (Z' \mid Z)$
   - Bilinéarité :
   $$\begin{aligned}(Z \mid Z' + \lambda Z'') &= \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}(z_1' + \lambda z_1'') + \overline{z_2}(z_2' + \lambda z_2'')\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2'\right) + \lambda \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z_1'' + \overline{z_2}z_2''\right) = (Z \mid Z') + \lambda\,(Z \mid Z'')\end{aligned}$$
   - Positive : $(Z \mid Z) = \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \geqslant 0$
   - Caractère définie :
     Supposons que $(Z \mid Z) = 0$ alors $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 0$ d'où $|z_1| = |z_2| = 0$, donc $Z = (z_1, z_2) = 0$.

   D'où $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E.
3. Soit $Z = (z_1, z_2) \in E$.
   $$\|Z\| = \sqrt{(Z \mid Z)} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$
4. Soit $\mathscr{B} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$, avec $Z_1 = (1,0)$, $Z_2 = (\mathbf{i}, 0)$, $Z_3 = (0,1)$ et $Z_4 = (0, \mathbf{i})$.
   On a : $\|Z_1\| = \|Z_2\| = \|Z_3\| = \|Z_4\| = 1$.
   $(Z_1 \mid Z_2) = \mathfrak{Re}(\mathbf{i}) = 0$.
   $(Z_1 \mid Z_3) = \mathfrak{Re}(0) = 0$.
   $(Z_1 \mid Z_4) = \mathfrak{Re}(0) = 0$.
   $(Z_2 \mid Z_3) = \mathfrak{Re}(0) = 0$.
   $(Z_2 \mid Z_4) = \mathfrak{Re}(0) = 0$.
   $(Z_3 \mid Z_4) = \mathfrak{Re}(\mathbf{i}) = 0$.
   Donc $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.
5. On pose : $F = \{(z_1, z_2) \in E \;/\; \mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = 0\}$.
   Considérons $\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \mapsto \mathfrak{Re}(z_1 + z_2) \end{cases}$. L'application φ est une forme linéaire sur E.
   Alors $F = \ker(\varphi)$ est un hyperplan de E, i.e. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
6. La famille $((\mathbf{i}, 0), (0, \mathbf{i}), (1, -1))$ d'éléments de F est libre et de cardinal 3, c'est donc une base de F.
   Soit $Z = (z_1, z_2) \in E$.
   $$Z \in F^\perp \iff \begin{cases} ((\mathbf{i}, 0) \mid Z) = 0 \\ ((0, \mathbf{i}) \mid Z) = 0 \\ ((1, -1) \mid Z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(-\mathbf{i}z_1) = 0 \\ \mathfrak{Re}(-\mathbf{i}z_2) = 0 \\ \mathfrak{Re}(z_1 - z_2) = 0 \end{cases} \iff z_1, z_2 \in \mathbb{R} \text{ et } z_1 = z_2$$
   D'où $F^\perp = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.
7. La famille $((\mathbf{i}, 0), (0, \mathbf{i}), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1))$ est une base orthonormé de F.
   Soit p la projection orthogonale sur F, alors
   $$p(Z_1) = (Z_1 \mid (\mathbf{i}, 0))\,(\mathbf{i}, 0) + (Z_1 \mid (0, \mathbf{i}))\,(0, \mathbf{i}) + \left(Z_1 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \frac{1}{2}(1, -1)$$

$$p(Z_2) = Z_2$$

$$p(Z_3) = (Z_3 \mid (\mathbf{i}, 0))\,(\mathbf{i}, 0) + (Z_3 \mid (0, \mathbf{i}))\,(0, \mathbf{i}) + \left(Z_3 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \frac{1}{2}(-1, 1)$$

$$p(Z_4) = Z_4$$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soit $Z = (\mathbf{j}, \mathbf{j}^2)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

   D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p(Z)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

   Donc $p(Z) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$.
   On sait que $d(Z, F) = \|Z - p(Z)\| = \| -\frac{1}{2}(1, 1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problème III : Fonctions de deux variables (CCINP PSI 2021)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. $\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$ ou $(1, 1)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x, 0) = x^3 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x, 0) > 0$. On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.
3. Soit $u, v \in \mathbb{R}$, $g(u, v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$.
   Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta))$.
4. $1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$ et $\cos^3\theta + \sin^3\theta \geq -2$ donc $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2(\frac{1}{2} - 2r)$.
   Lorsque $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$, $g(u, v) \geq 0$ donc f admet un minimum local en $(1, 1)$.
5. Global implique local donc le seul extremum possible est en $(1, 1)$ et c'est un minimum.
   Mais $f(-2, 0) = -8 < -1 = f(1, 1)$ donc f n'admet pas d'extremum global.
   Ou encore, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, 0) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, 0) = +\infty$ donc f n'est ni minorée ni majorée.